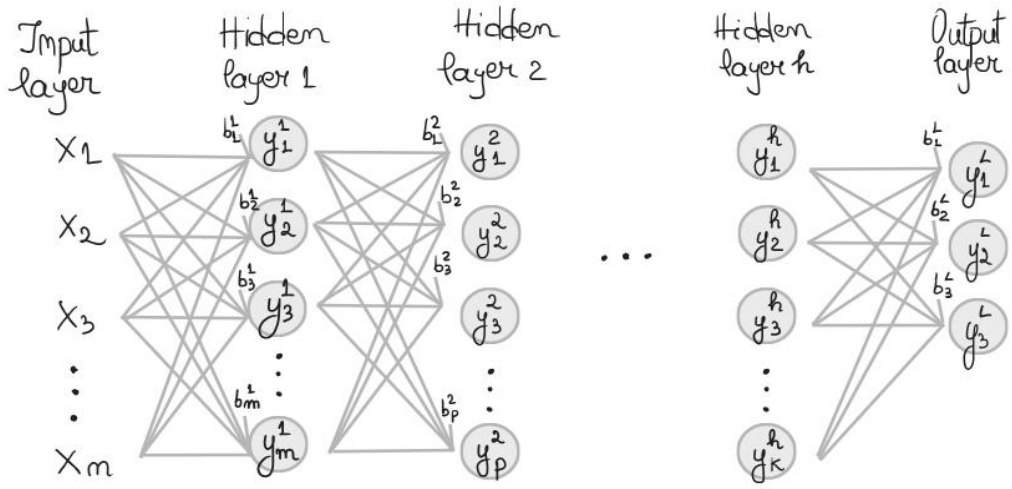
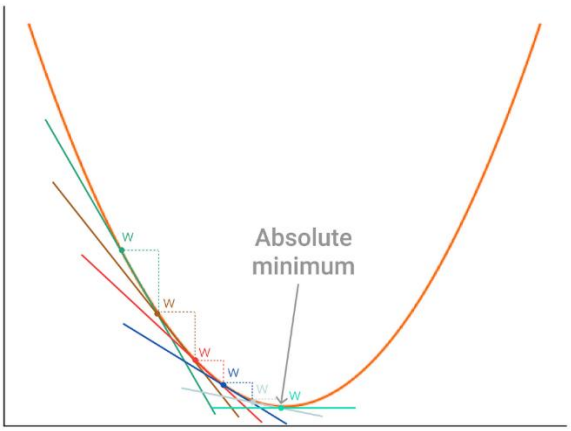
Labs 6-7 Rețele neuronale



Algoritmul **Backpropagation** ne ajută să antrenăm rețele neuronale.
A antrena o rețea = a updata ponderile și biasurile retelei a.î. să se minimizeze o anumită funcție de cost (/funcție de eroare). **Funcția de cost** ne spune cât de apropiate sunt outputurile date de rețea de outputurile reale (clasele) fiecărei instanțe.

Algoritmul **Gradient Descent** ne ajută să minimizăm funcția de cost. La fiecare pas se fac mișcări în direcția opusă a gradientului (Gradientul ne dă direcția celei mai mari creșteri ale funcției).



Obs:

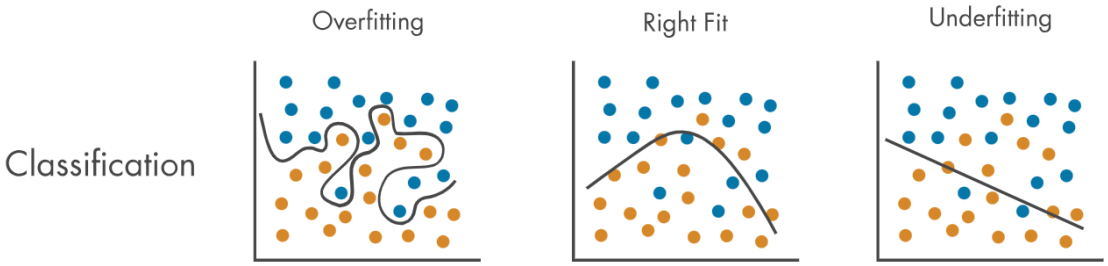
1. Dimensiunea stratului de intrare = dimensiunea unei instanțe (numărul de atribute de input)

2. Numărul de straturi ascunse și dimensiunea fiecărui strat ascuns se pot calcula conform unor euristici.

3. Dimensiunea stratului de ieșire în general depinde de taskul realizat (regresie, clasificare, …). Pentru clasificare în mai multe clase de obicei:
    - se folosește funcția de activare *softmax* (outputează probabilități)
    - numărul de neuroni de pe stratul de output = nr. de clase

4. O rată de invățare prea mică → convergență lentă
   O rată de invățare prea mare → se poate trece peste soluție în algoritmul de Gradient Descent

5. Un număr prea mic de epoci → underfitting
   Un număr prea mare de epoci → overfitting



6. Ponderile pot fi reținute în matrici (cu dimensiunea nr neuroni strat anterior * nr neuroni strat următor). Ponderile în general se inițializează cu valori random mici, diferite de 0.
   Dacă ponderile sunt 0 → gradienții vor fi 0 → rețeaua nu va învăța
   Daca ponderile au valori prea mari → în funcție de funcția de activare utilizată, convergența poate fi foarte lentă / pot apărea alte probleme (e.g., *exploding gradients*)

7. Funcția de cost
    - Clasificare: *cross entropy*
    - Regresie: *mean squared error, mean absolute error,…*

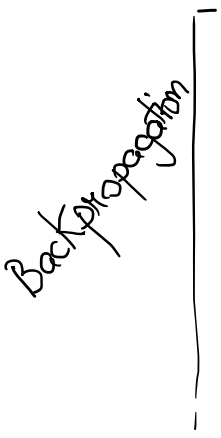
   Cross entropia ne spune cât de asemănătoare sunt 2 distribuții de probabilitate (adică cea outputată de rețea – după ce aplicăm softmax și cea reală – construită pe baza clasei reale a instanței)

8. Antrenarea rețelei

```
Pt. un număr de epoci și/sau cât timp funcția de cost nu scade sub o valoare:
    Pt. fiecare instanță X în parte (/ pt. un batch de instanțe):
```

Feed forward

```
Se dă instanța ca input la rețea și se calculează succesiv:
    Ieșirea neuronilor din primul strat ascuns
    Ieșirea neuronilor din al doilea strat ascuns
    ...
    Ieșirea neuronilor din a h-lea strat ascuns
    Ieșirea neuronilor din stratul de ieșire
```



Se calculează valoarea funcției de cost

Pornind de la valoarea funcției de cost se calculează succesiv:

Gradienții pentru neuronii din stratul de ieșire

Corecțiile de ponderi dintre stratul ascuns h și cel de ieșire

Gradienții pentru neuronii din stratul ascuns h

Corecțiile de ponderi dintre stratul ascuns h-1 și h

...

Gradienții pentru neuronii din primul stratul ascuns

Corecțiile de ponderi dintre stratul de intrare și primul strat ascuns

După ce am prezentat instanța / batch-ul la rețea se folosesc corecțiile de ponderi pentru a updata ponderile (si bias-urile).

Notații

Fie $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ instanța de input.

Fie $Y^s = ({y_1}^s, {y_2}^s, \dots)$ ieșirile pentru stratul ascuns cu numărul s

Fie ${w_{ij}}^s$ ponderea dintre stratul ascuns numărul $s-1$ si stratul ascuns s, care conectează neuronul i din stratul $s-1$ cu neuronul j din stratul s. Dacă s este 1, atunci sunt ponderile dintre primul strat de intrare și primul strat ascuns).

Fie b_j^s biasul neuronului j din stratul s.

f reprezintă funcția/funcțiile de activare (atenție, se pot folosi funcții de activare diferite de la strat la strat). f' reprezintă derivata funcției de activare.

Fie δ_j^s gradientul pentru neuronul j din stratul s.

α este rata de invățare.

Formule

Ieșirile neuronilor din primul strat ascuns:

$$ {y_j}^1 = f({b_j}^1 + \sum x_i \cdot {w_{ij}}^1) $$

Ieșirile neuronilor din a s-lea strat ascuns:

$$ {y_j}^s = f({b_j}^s + \sum {y_j}^{s-1} \cdot {w_{ij}}^s) $$

Ieșirea neuronilor din stratul de ieșire:

$$ {y_j}^L = f({b_j}^L + \sum {y_j}^h \cdot {w_{ij}}^L) $$

Funcția de cost/ de eroare, definită pentru o instanță: $c(y^D, y^L)$ primește ca argumente outputurile neuronilor din stratul de ieșire y^L și outputurile dorite/reale y^D. O valoare mică pentru funcția de cost ne indică apropierea dintre outputurile emise de rețea și cele reale. Valoarea funcției de cost pentru o epocă se definește însumând valorile funcției de cost pentru toate instanțele.

Exemple de funcții de cost:

- $C_{MSE}(y^D, y^L) = \frac{1}{n*k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}^D - y_{ij}^L)^2$
- $C_{CrossEntropy}(y^D, y^L) = -\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij}^D * \log(y_{ij}^L))$

, unde n este numărul de instanțe din setul de antrenare, k este numărul de neuroni de pe stratul de output, y_{ij}^L este outputul neuronului j al instanței numărul i din setul de antrenare.

Gradienții pentru neuronii din stratul de ieșire:

1. $\delta_j^L = f'({b_j}^L + \sum {y_j}^h \cdot {w_{ij}}^L) \cdot ({y_j}^D - {y_j}^L)$ (dacă folosim funcția de cost MSE)
2. $\delta_j^L = {y_j}^D - {y_j}^L$ (dacă folosim funcția de cost Cross Entropy)

Demonstrația pentru prima formulă a fost discutată la curs (slideul 46).

Pentru a ajunge la a doua formulă (gradienții pentru stratul de ieșire când se folosește cross entropia) găsiți trei demonstrații echivalente aici, aici și aici. În unele demonstrații veți vedea inversate ${y_j}^D$ și ${y_j}^L$ în formulă, deoarece la update-ul corecțiilor gradienții se scad (aici se adună).

În ambele cazuri se folosește regula de înlănțuire (chaining) a derivatelor deoarece funcția de cost C nu depinde direct de ponderi și de biasuri.

Gradienții pentru neuronii din stratul s:

$$\delta_j^s = f'({b_j}^s + \sum {y_j}^{s-1} \cdot {w_{ij}}^s) \cdot \sum_k \delta_k^{s+1} \cdot w_{jk}^{s+1}$$

Corecțiile de ponderi dintre stratul $s-1$ și s:

$$\Delta {w_{ij}}^s = \Delta {w_{ij}}^s + \alpha \cdot {y_i}^{s-1} \cdot \delta_j^s$$

Corecțiile de ponderi dintre stratul de intrare și primul strat ascuns:

$$\Delta {w_{ij}}^1 = \Delta {w_{ij}}^1 + \alpha \cdot x_i \cdot \delta_j^1$$

Corecțiile de biasuri pentru stratul s:

$$\Delta b_j^s = \Delta b_j^s + \alpha \cdot \delta_j^s$$

În final (după ce am prezentat la rețea toate instanțele/un batch de instanțe/o instanță), ponderile si biasurile se vor updata folosind corecțiile:

$${w_{ij}}^s = {w_{ij}}^s + \Delta {w_{ij}}^s$$

$$b_j^s = b_j^s + \Delta b_j^s$$

Toate aceste operații se pot implementa folosind operații cu matrici.

Pentru evaluarea rezultatelor se pot folosi: acuratețea, precizia, recall-ul, o matrice de confuzie, etc.