1. Algebra Relațională

Problema 1:

r:

A	B	C	D
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

r':

C	D	E
1	1	0
1	1	1
0	0	0
0	1	1
0	1	0

OPERATORI

- Proiecția $\Pi_{A_1 \ldots A_n}[r]$ ⇝ SELECT $A_1, \ldots, A_n$ FROM r
- Reuniunea $\cup$ ⇝ UNION
- Diferența $-$ ⇝ MINUS
- Intersecția $\cap$ ⇝ INTERSECT
- Produsul cartezian $\times$
- Selecția $\sigma_\theta(r)$ ⇝ SELECT ... FROM r WHERE θ
- Redenumirea $\rho_{\text{nume vechi col} / \text{nume nou col}}(r)$ ⇝ SELECT <nume vechi col> AS <nume nou col>

(Obs: redenumirea se poate aplica și pt. tabele)

- Join natural $r_1 \bowtie r_2$ → NATURAL JOIN
- θ-Join $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2$ → JOIN ... ON $\underbrace{\theta}_{\text{condiția/condițiile de join}}$
- Join la stânga $r_1 ⟕ r_2$ → LEFT JOIN
- Join la dreapta $r_1 ⟖ r_2$ → RIGHT JOIN
- Join extern $r_1 ⟗ r_2$ → FULL JOIN
- Semijoin: stâng $r_1 \ltimes r_2 = \Pi_{U_1}(r_1 \bowtie r_2)$; drept $r \rtimes r_2 = \Pi_{U_2}(r_1 \bowtie r_2)$
- Antijoin: stâng $r_1 \triangleright r_2 = r_1 - \Pi_{U_1}(r_1 \bowtie r_2)$; drept $r_1 \triangleleft r_2 = r_2 - \Pi_{U_2}(r_1 \bowtie r_2)$

proiecția lui r relativă la B, C

- $\Pi_{(B,C)}[r] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\Pi_{(C,D)}[r'] - \Pi_{(C,D)}[r] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 0]$

- $\Pi_{(A,C)}[r] \times \Pi_{(C,D)}[r'] = \begin{array}{c} A\ C \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} C\ D \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} =$

A	r.C	r'.C	D
0	1	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

eg. $r_1 =$

A	B	C
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$r_2 =$

B	C	E
1	1	1
0	0	1
1	0	0
1	0	1

$r_1 \ltimes r_2 = \Pi_{A,B,C}\left(\begin{array}{cccc} A & B & C & E \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$r_1 \triangleright r_2 = r_1 - r_1 \ltimes r_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $r \bowtie r' =$

A	B	C	D	E
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	1	1	1

- $r \underset{\theta}{\bowtie} r'$, unde $\theta = (\underset{r}{A} = \underset{r'}{C}) \wedge (\underset{r}{B} < \underset{r'}{D})$

$r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2 = \sigma_\theta(r_1 \times r_2)$

= <

$r \underset{\theta}{\bowtie} r' =$

A	B	r.C	r.D	r'.C	r'.D	E
0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1

Problema 2

- Să se găsească numele tuturor persoanelor ce trec pragul facultății.

$$\Pi_{p.nume,\, p.prenume}(\rho_{profesori/p}(profesori)) \cup \Pi_{s.nume,\, s.prenume}(\rho_{studenti/s}(studenti))$$

sau

$$\Pi_{profesori.nume,\, profesori.prenume}(profesori) \cup \Pi_{studenti.nume,\, studenti.prenume}(studenti)$$

- Afișați numele studenților care au luat nota 10 la materia BD.

$$\Pi_{s.nume}(\sigma_{\theta}(\rho_{studenti/s}(studenti) \bowtie_{\theta_1} \rho_{note/n}(note) \bowtie_{\theta_2} \rho_{cursuri/c}(cursuri)))$$

$\theta = (n.valoare = 10) \wedge (c.titlu\_curs = \text{'Baze de date'})$

$\theta_1 = (s.nr\_matricol = n.nr\_matricol)$

$\theta_2 = (c.id\_curs = n.id\_curs)$

2. Dependențe funcționale

Problema 1

Fie $X, Y \subseteq U$. O relație peste U satisface dependența funcțională $X \to Y$ dacă: // $t[X] = \Pi_X[t]$

$(\forall t_1, t_2), (t_1, t_2 \in r)$ $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$

Dependențe funcționale triviale (adevărate întotdeauna):
$X \to Y$ unde $Y \subseteq X$ (eg. $AB \to A$)

r:

A	B	C	D	E
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0

Dep. funcționale netriviale: $A \to E$, $E \to A$, $B \to D$, $D \to B$, $DE \to AB$, $AD \to BE$, $ABC \to DE$, $AB \to BE$, etc...

Obs: Dc. $\Pi_X[r]$ conține linii unice $\Rightarrow$ dep. fct. $X \to Y$ întotdeauna adev. pt. $\forall Y$

Problema 2

$\Sigma = \{AB \to C, AB \to D, CD \to E\}$

Găsiți min 2 dep. funcționale ce pot fi obținute din Σ utilizând sistemul de demonstrație R1.

$R_1 = \underbrace{\{FD1f, FD2f, FD3f\}}_{\text{reguli de deducere la nivel sintactic}}$

FD1f: $\dfrac{Y \subseteq X}{X \to Y}$ (Reflexivitate)

FD2f: $\dfrac{X \to Y,\ Z \subseteq W}{XW \to YZ}$ (Extensie)

FD3f: $\dfrac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z}$ (Tranzitivitate)

$\Sigma_R^+ = \{X \to Y \mid \Sigma \vdash_R X \to Y\}$ // mulț. dependențelor ce pot fi obținute la nivel sintactic din Σ folosind regulile R

1. $AB \to C$ (IP)
2. $AB \to D$ (IP)
3. $CD \to E$ (IP)
4. $D \subseteq D$
5. $ABD \to CD$ (FD2f, 1, 4)
6. $ABD \to E$ (FD3f, 5, 3)
7. $B \subseteq ABD$
8. $ABD \to B$ (FD1f, 7)

...

$\Sigma^+_{R_1} = \Sigma \cup \{ABD \to CD, ABD \to E, ABD \to B, \dots\}$

Problema 3

$RA = \{A_1, A_2, A_3\}$

Axiomele lui Armstrong (reguli de inferență)

$A_1: \dfrac{}{A_1 \dots A_m \to A_i}, \; i=\overline{1,m}$

$A_{2.1}: \dfrac{A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_r}{A_1 \dots A_m \to B_j}, \; j=\overline{1,r}$

$A_{2.2}: \dfrac{A_1 \dots A_m \to B_j, \; j=\overline{1,r}}{A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_r}$

$A_3: \dfrac{A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_r, \; B_1 \dots B_r \to C_1 \dots C_p}{A_1 \dots A_m \to C_1 \dots C_p}$

Idee de demonstrație:

$X \subseteq XW \overset{A_1 (A_{2.2})}{\Longrightarrow} XW \to X$

$X \to Y$

$\Rightarrow^{A_3} XW \to Y \; (A_{2.1}) \overset{A_{2.2}}{\Longrightarrow} XW \to YZ$

$Z \subseteq W \overset{A_1}{\Longrightarrow} XW \to Z$

(deci $Z \subseteq WX$)

Dem. Notăm $X = (A_1 \dots A_m)$, $Y = (B_1 \dots B_r)$, $Z = (C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$ $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \le p$,
$W = (C_1 \dots C_p)$

- Aplicare A_1: $\dfrac{}{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to A_i}, \; i=\overline{1,m}$ (1)
- Aplicare $A_{2.2}$ $\dfrac{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to A_i, \; i=\overline{1,m}}{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to A_1 \dots A_m}$ (2)
- Aplicare A_3 $\dfrac{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to A_1 \dots A_m \quad A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_r}{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to B_1 \dots B_r}$ (3)
- Aplicare A_1: $\dfrac{}{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to C_{i_j}}, \; j=\overline{1,k}$ (4)
- Aplicare $A_{2.1}$ $\dfrac{A_1 A_2 \dots A_m C_1 \dots C_p \to B_1 \dots B_r}{A_1 \dots A_m C_1 \dots C_p \to B_j}, \; j=\overline{1,r}$ (5)
- Aplicare $A_{2.2}$ $\dfrac{A_1 \dots A_m C_1 \dots C_p \to B_j \; j=\overline{1,r} \qquad A_1 \dots A_m C_1 \dots C_p \to C_{i_t} \; t=\overline{1,k}}{A_1 \dots A_m C_1 \dots C_p \to B_1 \dots B_r C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_k}}$ (6)

3. Dependențe multivaluate

Problema 1

r:

A	B	C	D	E
1	0	1	7	2
1	0	4	3	5
1	0	1	7	5
1	0	4	3	2

. Obs: Dc r satisface $X \to Y$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Y$

$\Rightarrow$ dep. multivaluate: $\begin{cases} CD \twoheadrightarrow AB \\ D \twoheadrightarrow C \end{cases}$

dep. multivaluate triviale: $\begin{cases} ABC \twoheadrightarrow DE \\ AB \twoheadrightarrow B \end{cases}$

Def: $X, Y \subseteq U$. Relația r peste U satisface dep multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$ dc. pt. oricare două tuple $t_1, t_2 \in r$ satisfăcând $t_1[X] = t_2[X]$, $\exists$ tuplele t_3, t_4 a.î.:

$\begin{cases} t_3[X] = t_1[X], & t_3[Y] = t_1[Y], t_3[Z] = t_2[Z] \\ t_4[X] = t_2[X], & t_4[Y] = t_2[Y], t_4[Z] = t_1[Z] \end{cases}$, unde $Z = U - XY$ (rest)

O dep. multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$ este trivială dacă $Y \subseteq X$ sau $Z = \emptyset$ (dep. triviale sunt întotdeauna adevărate)
($\Leftrightarrow X \cup Y = U$)

O altă modalitate de determinare a dep. multivaluate

$AB \twoheadrightarrow CD$

X AB	Y CD	Z E
10	17	2
	43	5

Dc. $\exists$ toate produsele carteziene între valorile de pe coloanele Y și Z, atunci avem dependență multivaluată, altfel nu
$X \twoheadrightarrow Y$

$D \twoheadrightarrow BC$

X D	Y BC	Z AE
7	01	12
3	04	15

MVD0f $\dfrac{XYZ = U,\ Y \cap Z \subseteq X,\ X \twoheadrightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Z}$

MVD1f $\dfrac{Y \subseteq X}{X \twoheadrightarrow Y}$

MVD5f: $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y \quad X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow YZ}$

...

1. $AB \twoheadrightarrow CD$ (ip.)
2. $AB \twoheadrightarrow E$ (1, MVD0f) // $X = AB, Y = CD, Z = E$
3. $AB \twoheadrightarrow A$ (MVD1f)
4. $AB \twoheadrightarrow AE$ (2,3, MVD5f)

...

Problema 3 $\dfrac{\Sigma = \{X \twoheadrightarrow Y, Y \twoheadrightarrow Z, Z \twoheadrightarrow V\}}{\Sigma \vdash_{RFM} X \twoheadrightarrow ((V - Z) - Y)}$

$RFM = \{$ FD1f - FD3f, MVD0f - MVD3f, FD-MVD1f - FD-MVD3f $\}$

Aplicăm MVD3f de 2 ori: $\dfrac{Y \twoheadrightarrow Z \quad Z \twoheadrightarrow V}{Y \twoheadrightarrow V - Z}$, $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y \quad Y \twoheadrightarrow V - Z}{X \twoheadrightarrow (V - Z) - Y}$

MVD3f $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y \quad Y \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z - Y}$

Problema 4

$\dfrac{Y \subseteq X,\ Z \subseteq W}{XW \twoheadrightarrow YZ}$

Se aplică MVD1f, apoi MVD2f: MVD1f $\dfrac{Y \subseteq X}{X \twoheadrightarrow Y}$; MVD2f $\dfrac{Z \subseteq W,\ X \twoheadrightarrow Y}{XW \twoheadrightarrow YZ}$