

For the seminar 7, we are going to solve Q1 and Q2 given below (exercises from the given test samples from the last year's course page: <https://sites.google.com/view/fii-pa/2022/lectures>), exercises 8, 3 b), 3 a) from seminars 5 & 6 and discuss the ideas for 9 and 10.

Q1

Se consideră următorul algoritm probabilist, care nu primește la intrare nicio valoare:

```
f()
{
    k = random(6); // intoarce un numar aleatoriu uniform distribuit din multimea
    switch (k) { // { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }
```

1

```
case 0: return 2; // instructiunea switch functioneaza ca in limbajul C
case 1: return 0;
case 2: return f();
case 3: return f();
case 4: return 2;
case 5: return f();
}
}
```

- (a) (6p) Care e probabilitatea ca algoritmul să se oprească după exact i apeluri ale funcției $f()$, unde $i \in \mathbb{N}$?
- (b) (5p) Care e probabilitatea ca algoritmul să ruleze la infinit?
- (c) (3p) Care e probabilitatea ca algoritmul să întoarcă valoarea 0?
- (d) (3p) Care e probabilitatea ca algoritmul să întoarcă valoarea 1?
- (e) (3p) Care e probabilitatea ca algoritmul să întoarcă valoarea 2?

Q2

Fie următoarea problemă:

Input:

- un tablou $A[0 \dots n - 1]$ cu elemente din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- o valoare v din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Output:

- indicele ultimei apariții a valorii v în A sau
- -1 , dacă v nu apare în A .

(a) (5p) Proiectați un algoritm determinist care rezolvă problema de mai sus printr-o parcurgere secvențială, care să realizeze cât mai puține comparații.

(b) (5p) Fie $C(n)$ variabila care desemnează numărul de comparații efectuate de algoritmul de mai sus pentru date de intrare de dimensiune n . Care sunt valorile posibile ale lui $C(n)$? (fără probabilitățile asociate)

(c) (5p) Presupunând că distribuția de probabilitate pentru datele de intrare este astfel încât fiecare poziție din A să conțină:

- i. valoarea 0 cu probabilitate $4/24$;
- ii. valoarea 1 cu probabilitate $3/24$;
- iii. valoarea 2 cu probabilitate $6/24$;
- iv. valoarea 3 cu probabilitate $5/24$;
- v. valoarea 4 cu probabilitate $1/24$;
- vi. valoarea 5 cu probabilitate $5/24$,

iar v este aleasă aleatoriu uniform din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, să se determine $Prob(C(n) = x)$, pentru toate valorile x determinate la punctul anterior.

(d) (5p) Folosind variabila aleatorie $C(n)$, să se determine numărul mediu de comparații efectuate de algoritm pentru date de intrare de dimensiune n (având distribuția de probabilitate de mai sus).

For Q2, we will solve b), c) and d), assuming this code is given for a):

```
f(A, v) {
    i = n-1;
    while((i >= 0) && (A[i] != v)){
        i=i-1;
    }
    return i;
}
```

3b

To make the reduction from CNF-SAT to 3-CNF-SAT, we need to see how we can preprocess a formula F in CNF-SAT to obtain a formula F' in 3-CNF-SAT, such that F is satisfiable if and only if F' is satisfiable.

For the preprocessing part, we will talk about how can we convert a clause C with 1, 2 and n literals to a conjunction of clauses C' with exactly 3 literals.

For the general case (when C has n literals):

$$C = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$$
$$C' = (p_1 \vee p_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee p_3 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee p_4 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (\neg x_{m-3} \vee p_{m-2} \vee p_m)$$